

УДК 519.644

## МЕТОДИКА ВОССТАНОВЛЕНИЯ МОЩНОСТИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ПРИМЕСИ, ДИФФУНДИРУЮЩЕЙ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

*E.A. Семенчин, M.B. Кузякина*

Кубанский государственный университет, Краснодар  
es14@mail.ru, kuZZyashka@yandex.ru

Подробно исследована задача восстановления мощности точечного источника примеси, диффундирующей в турбулентной атмосфере. Данная задача сведена к решению нескольких интегральных уравнений первого рода. Предложена методика построения устойчивого алгоритма приближенного решения этих уравнений, основанная на использовании фильтра Калмана-Бьюси.

## A METHOD FOR RECONSTRUCTION OF PERCOLATING IN THE TURBULENT ATMOSPHERE ADMIXTURE POINT SOURCE POWER

E.A. Semenchin, M.V. Kuziakina

Kuban State University, Krasnodar

In the paper presented the problem of reconstruction of percolating in the turbulent atmosphere admixture point source power is thoroughly investigated. The problem is reduced to the solution of several integral equations of the first kind. A novel method, based on Kalman-Biucy filter usage, for building of the numerically stable algorithm for approximate solution of these equations is proposed.

### 1. Введение

В настоящее время значительное число работ посвящено исследованию загрязнения атмосферы промышленными выбросами (см. [1] и библиографию, приведенную в этой монографии). Эти исследования, как правило, основаны на анализе математических моделей рассеяния примесей в турбулентной атмосфере, в частности, полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии при заданных для его решения краевых условиях. В рамках этих исследований большое прикладное значение имеют исследования, посвященные анализу и решению обратных задач: определить основные параметры атмосферной диффузии (фоновую концентрацию, коэффициенты турбулентной диффузии и т.д.) по замерам концентрации примеси в атмосфере [2]. В частности, задача определения мощности источника примеси по указанным замерам [2], решению которой (методами стохастической фильтрации) посвящена данная работа.

На предприятиях, осуществляющих выбросы примесей в атмосферу, в большинстве случаев отсутствует учет фактических объемов выброса, либо они умышленно дают ложные (как правило, заниженные) показатели мощности источника выбросов вредных веществ в целях избежать штрафных санкций.

Значения мощности источника выбросов используются в существующих методиках оценки экономического ущерба, причиняемого воздушной среде и подстилающей поверхности выбросами примесей промышленными предприятиями, для оценки прогнозируемой величины предотвращенного ущерба и размеров платежей за выбросы в атмосферу примесей от стационарных источников различного типа [3]. Эти факты указывают на актуальность и практическую значимость результатов анализа указанной задачи.

## 2. Постановка задачи

Математическая модель, описывающая процесс рассеяния примеси в турбулентной атмосфере имеет вид [4]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z} + f, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$q(0, x, y, z) = 0, \quad (2)$$

$$\{K_z \frac{\partial q}{\partial z} + wq\} \Big|_{z=z_0} = \{V_s q\} \Big|_{z=z_0}, \quad (3)$$

$$q(t, x, y, z) \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad z \geq 0, \quad (4)$$

где  $q(t, x, y, z)$  – средняя концентрация примеси в точке  $(x, y, z) \in E_+^3$ ,  $E_+^3 = \{(x, y, z) : x, y \in (-\infty; \infty), z \geq 0\}$ , в момент времени  $t$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $T = \text{const} > 0$ ;  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$  – коэффициенты турбулентной диффузии соответственно вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ;  $U$  – компонента средней скорости ветра вдоль оси  $Ox$ ;  $w$  – скорость осаждения частиц примеси вдоль оси  $Oz$  на подстилающую поверхность;  $z_0$  – коэффициент шероховатости подстилающей поверхности;  $\varphi(x, y, z)$ ,  $f$ ,  $V_s$  – соответственно фоновая концентрация, функция источника, скорость сухого осаждения этой примеси.

Введение коэффициента шероховатости подстилающей поверхности  $z_0$  позволяет учитывать рельеф местности [4, 5].

Будем предполагать, что коэффициенты в (1) имеют вид [6]:

$$K_x = K_y = K_0 U, \quad K_0 = \text{const};$$

$$U = U(t, x, y, z), \quad w = w(t, x, y, z), \quad V_s = V_s(t, x, y, z) \text{ - непрерывны в } E_+^3;$$

$$K_z = K_z(t, x, y, z) \text{ - непрерывно дифференцируемая функция в } [0, T] \times E_+^3.$$

Соотношения (1)–(4) определяют математическую модель процесса рассеяния примеси в турбулентной атмосфере.

В данной работе представлены результаты исследований следующей задачи, которая является обратной в рамках модели (1)–(4): определить мощность  $Q(t)$  точечного источника непрерывного действия по экспериментально заданным значениям концентрации примеси  $q(t, x, y, z)$ , основным параметрам модели (1)–(4):  $U$ ,  $W$ ,  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ , и координатами источника  $(0, 0, H)$ .

Использование известных методов регуляризации Тихонова и Лаврентьева для решения поставленной задачи не представляется возможным, т.к. ошибки измерения концентрации примеси  $q(t, x, y, z)$  представляют собой случайный процесс типа белого гауссова шума. Поэтому в данной работе приведена методика численного решения этой задачи, основанная на использовании линейных фильтров Калмана-Бьюси [8]. Задача восстановления мощности источника в случае, когда случайные ошибки измерения игнорируются, была решена методом регуляризации А.Н. Тихонова в работе [7] при известном количестве примеси, выпадающей на подстилающую поверхность.

### 3. Методика решения обратной задачи

Пусть при решении указанной в пункте 2 обратной задачи в математической модели (1)–(4) фоновая концентрация  $\varphi(x, y, z)$  не учитывается, т.е. в начальный момент времени  $0 \varphi(x, y, z) \equiv 0$ .

Из (1) следует, что

$$f(t, x, y, z) = \frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} + \alpha q - \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z}.$$

Пусть источник  $f$  в (1) является точечным с координатами  $(x_0, y_0, H)$ , т.е. [4]  $f(t, x, y, z) = Q(t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - H)$ , где  $Q(t)$  – мощность данного источника (масса примеси, выброшенной в атмосферу источником в момент времени  $t$ ),  $\delta(\alpha)$  - дельта-функция Дирака.

Можно убедиться [2-4, 7], что если в (1)  $f$  заменить на  $Q(t)$ , то решение задачи  $q$  из (1)–(4) не изменится, и, следовательно,

$$Q(t) = \frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (5)$$

Таким образом, для решения рассматриваемой обратной задачи достаточно вычислить

$$\frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial z}, \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \text{ и } \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}$$

в заданных точках  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$  и подставить эти значения в правую часть (5).

Согласно [9] задача нахождения производной 2-го порядка (задача нахождения производной 1-го порядка решается аналогично, поэтому авторы не считают нужным приводить оба рассуждения)  $z(t)$  функции  $u(t)$  (т.е.  $z(t) = \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2}$ ) сводится к решению (относительно  $z(t)$ ) интегрального уравнения первого рода:

$$\int_0^t (t-\tau) z(\tau) d\tau = u(t) - u(0) - t \left( \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right) \Big|_{t=0}. \quad (6)$$

Обозначим

$$R_x(t, x, y, z) = \frac{\partial q(t, x, y, z)}{\partial x}, R_z(t, x, y, z) = \frac{\partial q(t, x, y, z)}{\partial z}, R_t(t, x, y, z) = \frac{\partial q(t, x, y, z)}{\partial t},$$

$$R_{xx}(t, x, y, z) = \frac{\partial^2 q(t, x, y, z)}{\partial x^2}, R_{yy}(t, x, y, z) = \frac{\partial^2 q(t, x, y, z)}{\partial y^2}, R_{zz}(t, x, y, z) = \frac{\partial^2 q(t, x, y, z)}{\partial z^2}.$$

Тогда (см. (6)) для определения, например,  $R_{zz}(t, x, y, z)$  будем иметь интегральное уравнение:

$$q(t, x, y, z) - q(t, x, y, 0) = \int_0^z (z-\tau) R_{zz}(t, x, y, \tau) d\tau + z R_z(t, x, y, 0). \quad (8)$$

Из (5) следует, что условия (7) в данном случае будут выполнены.

Соотношение (8) представляет собой интегральное уравнение первого рода относительно неизвестной функции  $R_{zz}$ . Задача построения решения таких уравнений является некорректно поставленной [9]. При решении этой задачи перейдем от (6) к его дискретному аналогу [10]:

$$q(t, x, y, z) - q(t, x, y, 0) - z R_z(t, x, y, 0) = \sum_{k=1}^p [(z_p - z_k) R_{zz}(t, x, y, z_k) r_k], \quad (9)$$

$z_1, \dots, z_p$  - точки деления интервала  $[0, z]$ ,

$$r_k = \begin{cases} \frac{z_2 - z_1}{2}, & k=1, \\ \frac{z_{k+1} - z_{k-1}}{2}, & k=2, \dots, (p-1), \\ \frac{z_p - z_{p-1}}{2}, & k=p. \end{cases}$$

Согласно (9) по значениям  $q(t_1, x, y, z), \dots, q(t_N, x, y, z)$ , заданным в точке  $(x, y, z)$  в различные моменты времени  $t_1, \dots, t_N \in [0, T]$  с ошибками измерения соответственно  $v_1 = \tilde{v}(t_1), \dots,$

$v_2 = \tilde{v}(t_2)$ , ...,  $v_N = \tilde{v}(t_N)$  ( $\tilde{v}(t)$  – случайный процесс типа белого гауссова шума), требуется найти (восстановить) значения  $R_{zz}(t_1, x, y, z_k)$ , ...,  $R_{zz}(t_N, x, y, z_k)$ ,  $k = 1, \dots, p$ .

Помехи являются случайными, а не детерминированными, поэтому метод регуляризации А.Н. Тихонова неприменим [9].

Введем в рассмотрение матрицу  $A = (A_{ik})$ :

$$A_{ik} = (z_p - z_k)r_k, \quad k = 1, \dots, p, \quad i = 1, \dots, N,$$

в которой все столбцы одинаковы. Тогда, с учетом введенных обозначений и замечаний, из (9) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^p [A_{1k} \cdot R_{zz}(t_1, x, y, z_k)] + v_1 = q(t_1, x, y, z) - q(t_1, x, y, 0) - zR_z(t_1, x, y, 0), \\ \sum_{k=1}^p [A_{2k} \cdot R_{zz}(t_2, x, y, z_k)] + v_2 = q(t_2, x, y, z) - q(t_2, x, y, 0) - zR_z(t_2, x, y, 0), \\ \dots \\ \sum_{k=1}^p [A_{Nk} \cdot R_{zz}(t_N, x, y, z_k)] + v_N = q(t_N, x, y, z) - q(t_N, x, y, 0) - zR_z(t_N, x, y, 0), \end{cases} \quad (10)$$

из которой надо определить  $R_{zz}(t, x, y, z_k)$ .

Систему (10) представим в матричном виде:

$$AR_{zz} + \tilde{v} = q. \quad (11)$$

где  $q(t_i, x, y, z_k) = q(t_i, x, y, z_k) - q(t_i, x, y, 0) - zR_z(t_i, x, y, 0)$ ,  $i = (1, 2, \dots, N)$ ,  $k = (1, 2, \dots, p)$ .

Для подавления влияния значений белого шума  $\tilde{v}(t)$  на значения  $R_{zz}(t_k, x, y, z_p)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , можно использовать многошаговый (многократный) фильтр Калмана-Бьюси [8].

Задаем начальные приближения для решения  $R_{zz}^{(0)} = R_{zz}(0, x, y, z)$  и матрицы ковариаций ошибок решения  $P^{(0)}$ . Для их выбора удобно использовать метод регуляризации Тихонова [9], согласно которому

$$R_{zz}^{(0)} = (\alpha E + A^T A)^{-1} A^T q, \quad P^{(0)} = \delta^2 (\alpha E + A^T A)^{-1}, \quad (12)$$

где  $E$  – единичная матрица,  $\delta \geq 0$  – верхняя оценка значения погрешности правой части (11),  $\alpha > 0$  – параметр регуляризации, играющий роль неопределенного множителя Лагранжа, целесообразно находить (согласно [10]) методом выбора квазиоптимального значения параметра регуляризации.

Согласно этому методу выбирается значение  $\alpha > 0$ , которое минимизирует функцию

$$\chi(\alpha) = \left\| \alpha \frac{dR_{zz}^{(\alpha)}}{d\alpha} \right\|. \quad (13)$$

Для нахождения квазиоптимального значения чаще всего используется последовательность

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k, \quad q > 0,$$

и вычисления производятся начиная с  $k = 0$  до некоторого  $k = K$ .

Минимизация (13) на таких значениях параметра регуляризации соответствует поиску минимума

$$\tilde{\chi}(\alpha_{k+1}) = \|R_{zz}^{(\alpha_{k+1})} - R_{zz}^{(\alpha_k)}\|.$$

Последующие приближения  $R_{zz}^{(l)}$  решения  $R_{zz}$  системы (11) могут быть найдены согласно следующей итерационной схемы [11]:

$$R_{zz}^{(l)} = R_{zz}^{(l-1)} + \left( (P^{(l-1)})^{-1} + (A^{(l)})^T (N^{(l)})^{-1} A^{(l)} \right)^{-1} (A^{(l)})^T (N^{(l)})^{-1} (q^{(l)} - AR_{zz}^{(l-1)}), \quad (14)$$

$$P^{(l)} = \left( (P^{(l-1)})^{-1} + (A^{(l)})^T N^{(l)} A^{(l)} \right)^{-1}, \quad N^{(l)} = M[\tilde{v}^{(l)} (\tilde{v}^{(l)})^T], \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (15)$$

На практике можно столкнуться с ситуацией, когда обратные матрицы в соотношениях (12), (14)-(15) найти (определить) нельзя (рассматриваемые матрицы могут быть вырожденными). В этом случае вместо обратных матриц следует использовать в (12), (14)-(15) псевдообратные, воспользовавшись методом Гревилля построения псевдообратной матрицы [12].

Соотношения (12), (14)-(15) позволяют найти значения величины  $R_{zz}^{(L)}$  – оценку  $R_{zz}$  с заданной погрешностью  $\varepsilon > 0$ . Аналогично определяются  $R_{xx}^{(L)}, R_{yy}^{(L)}, R_t^{(L)}, R_x^{(L)}, R_y^{(L)}, R_z^{(L)}$  соответственно для  $R_{xx}, R_{yy}, R_t, R_x, R_y, R_z$ .

Подставляя найденные оценки в (5), получим наилучшую в среднем квадратическом смысле оценку  $Q(t_k)$  значения  $Q(t_k)$ :

$$\begin{aligned} Q(t_k) = & R_t^{(L)} + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot R_x^{(L)} - \frac{\partial w}{\partial z} \cdot R_z^{(L)} - K_x \cdot R_{xx}^{(L)} - \frac{\partial K_x}{\partial x} \cdot R_x^{(L)} - \\ & - K_y \cdot R_{yy}^{(L)} - \frac{\partial K_y}{\partial y} \cdot R_y^{(L)} - K_z \cdot R_{zz}^{(L)} - \frac{\partial K_z}{\partial z} \cdot R_z^{(L)}, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (16)$$

Для вычисления значений  $Q(t_k)$  с помощью ЭВМ описанный алгоритм реализован в программном продукте «MFKB» на языке программирования MATLAB C/C++ Math Library 2.2.

#### 4. Пример 1

Для проверки качества получаемых расчетных данных значений  $Q(t_k)$  по указанной в пункте 3 методике, воспользуемся программным продуктом «МFKB» и экспериментальными данными, взятыми из отчетов Центра лабораторного анализа и технических измерений по Южному Федеральному округу (ЦЛАТИ по ЮФО) и содержащими информацию о выбросах в атмосферу диоксида азота. Согласно этим данным:  $H = 20$  м,  $U = 0,5 \ln z$  (м/с),  $K_x = K_y = K_0 U$  м<sup>2</sup>/с,  $K_0 = 0,25$  м,  $K_z = 0,15z$  м<sup>2</sup>/с,  $t_0 = 0$  с,  $w = 0,01$  (м/с). Значения восстановленной мощности источника  $Q(t)$  в точке (15,15,20) для сравнения были получены на четырех отрезках времени:  $t \in [0,30]$  с,  $t \in [0,55]$  с,  $t \in [0,500]$  с,  $t \in [0,3000]$  с.

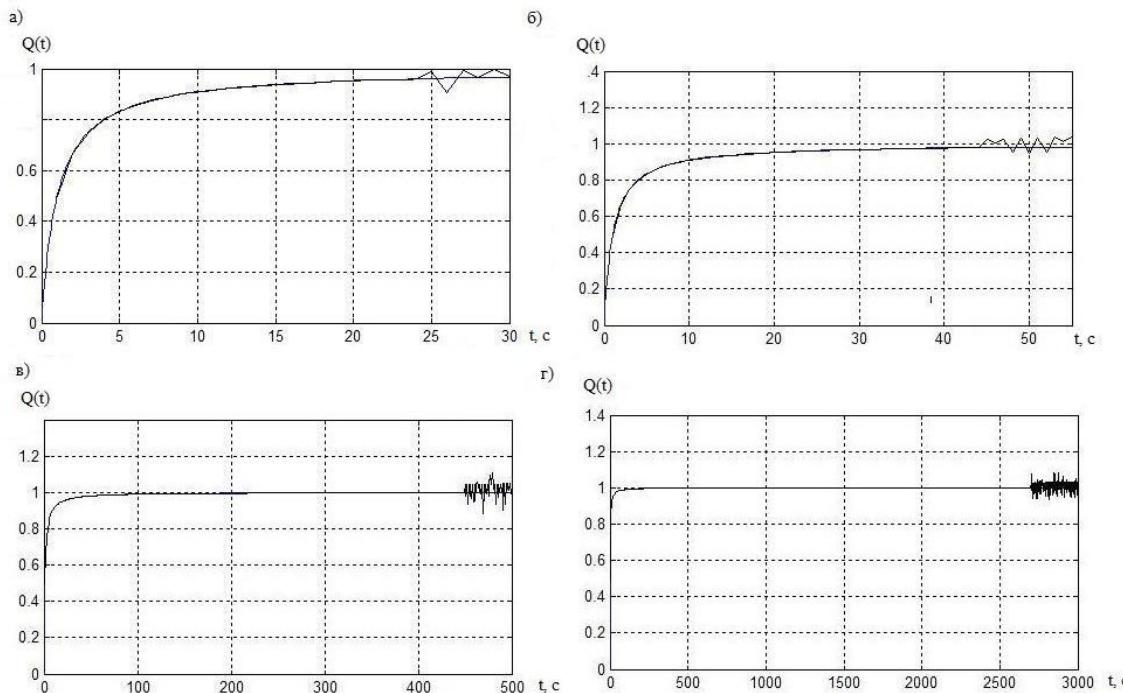


Рисунок 1 - Графическое изображение значений экспериментальной (гладкая линия) и расчетной (ломанная линия) мощностей источника примеси соответственно на отрезке времени: а)  $t(c) \in [0,30]$ , б)  $t(c) \in [0,55]$ , в)  $t(c) \in [0,500]$ , г)  $t(c) \in [0,3000]$ , рассчитанные с помощью программного продукта «МFKB».

Сравнивая значения восстановленной и заданной мощностей на каждом из четырех полученных результатов, убеждаемся в совпадении (с малой погрешностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ ) этих значений почти на всем рассматриваемом отрезке времени (графическая визуализация

результатов проведенных расчетов приведена на рисунке 1). В конце этого отрезка (на последних 5-10% рассматриваемого отрезка) наблюдается увеличение указанной погрешности. Колебания восстановленных значений мощности источника вокруг экспериментальных данных наблюдаются каждый раз только на конце каждого из рассматриваемых отрезков (удается рассчитать порядка двадцати временных слоев до наступления вычислительной неустойчивости). Этот факт указывает на то, что неустойчивость предлагаемого метода может проявляться только на конце рассматриваемого временного отрезка независимо от его длины.

## **5. Сравнительный анализ полученных результатов с результатами, полученными методом регуляризации Тихонова при условии, что случайные ошибки измерения игнорируются**

Задача восстановления мощности  $Q(t)$  точечного источника непрерывного действия по экспериментально заданным плотности осадка на подстилающей поверхности  $\bar{P}(t, x, y, z_0)$ , скорости сухого осаждения частиц примеси  $V_s$ , основным параметрам модели (1)–(4):  $U$ ,  $W$ ,  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ , и координатам источника  $(0,0,H)$  была решена методом регуляризации А.Н. Тихонова в работе [7] в случае, когда случайные ошибки игнорируются.

Для восстановления значения  $Q(t)$  по данным примера 1 на отрезке времени  $t \in [0,55]$  с и замерам плотности осадка на подстилающей поверхности был использован программный продукт «IPIS» [7]. Графическая визуализация полученных результатов в сравнении с результатами, полученными в примере 1 на отрезке времени  $t \in [0,55]$  с, приведена на рисунке 1.

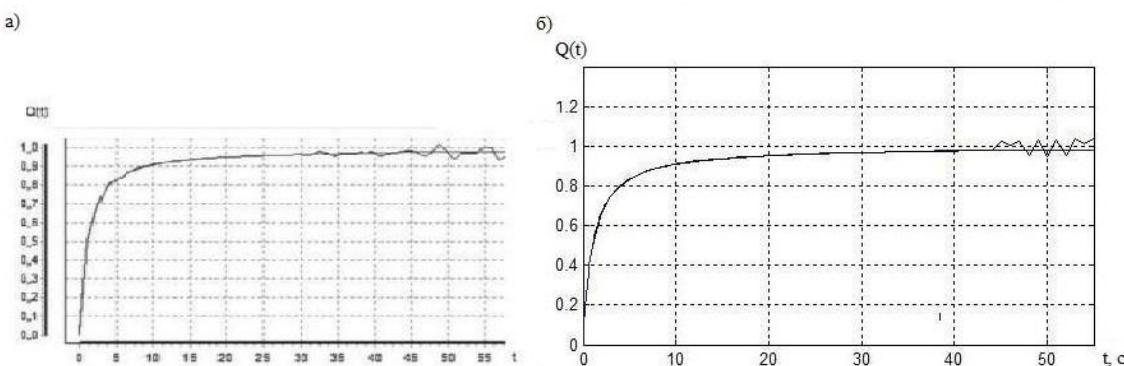


Рисунок 2 а) - Графическое изображение значений экспериментальной (гладкая линия) и расчетной (ломанная линия) мощностей источника примеси на отрезке времени  $t \in [0,55]$  с, рассчитанный с помощью программного продукта «IPIS» ; 2 б) - графическое изображение значений экспериментальной (гладкая линия) и расчетной (ломанная линия) мощностей источника примеси на отрезке времени  $t \in [0,55]$  с, рассчитанный с помощью программного продукта «MFKB».

Численные расчеты показали, что игнорировать случайную ошибку измерения нецелесообразно. При сравнении результатов можно отметить также, что в случае игнорирования случайной ошибки измерения (рис. 2а) расчетная мощность источника примеси начинает отклоняться от экспериментальной еще с середины рассматриваемого отрезка, а в случае учета случайной ошибки (рис. 2б) – отклонение происходит на последней части временного отрезка, составляющей примерно 10% от всей длины этого отрезка. Таким образом, качество представленного алгоритма в 2-2,5 раза превышает качество метода регуляризации Тихонова.

## 6. Выводы

Многократно проведенные численные эксперименты (см. также пример 1 из пункта 4) показывают, что основное достоинство расчетов, проводимых с помощью программы «MFKB», - совпадение (с малой погрешностью) расчетных и восстановленных значений мощности точечного источника почти на всем рассматриваемом отрезке времени. Только в конце отрезка эти значения начинают заметно отличаться друг от друга. При этом этот эффект не зависит от длины интервала  $(0, T)$ .

Основной недостаток: в случае, когда ядро интегрального уравнения (9) принимает значения меньше  $10^{-4}$ , восстановить мощность источника практически невозможно. Этот недостаток алгоритма можно устранить путем масштабирования ядра рассматриваемого интегрального уравнения.

Кроме того, для определения матрицы ковариаций ошибок и начальных приближений многошаговый фильтр Калмана-Бьюси требует большого объема статистических данных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алоян А.Е. Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. - М.: Наука, 2008. - 415 с.
2. Семенчин Е.А., Кармазин В.Н., Калина Н.Н. О разрешимости некоторых обратных задач для уравнения атмосферной диффузии. Экологический вестник научных центров Черноморского экологического сотрудничества, №4, 2005. – С. 47-51
3. Семенчин Е.А., Кузякина М.В. Методика расчета экономического ущерба, причиняемого воздушной среде выбросами легкой примеси от промышленных предприятий. Труды Кубанского государственного аграрного университета, 2009, 2(17). – С. 34-39

4. Семенчин Е.А. Аналитические решения краевых задач в математической модели атмосферной диффузии. Ставрополь: СКИУУ, 1993. – 141 с.
5. Бызова Н.Л., Гаргер Е.К., Иванов В.Н. Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примеси. – Л.: Гидрометеоиздат, 1991. 279 с.
6. Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 448 с.
7. Лоскутова Е. О. Прямые и обратные задачи расчета количества примеси, выпадающей на подстилающую поверхность: Дис. канд. физ.-мат. наук: 25.03.09 / Кубанский государственный университет. – Краснодар, 2009. – 144 с.
8. Сизиков В.С. Устойчивые методы обработки результатов измерений. Учебное пособие – СПб: Изд-во «СпецЛит», 1999. – 240 с.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 142 с.
10. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004, 480 с.
11. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Изд-во «Наукова думка», 1986. – 544 с.
12. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц. – Москва: изд-во "Физматлит", 2004. – 576 с.