

УДК 52.17

UDC 52.17

**ПРОГНОЗ УРОВНЯ ВОДЫ В РЕКЕ С
КРУТЫМ ПАДЕНИЕМ ВОДОТОКА,
ОСНОВАННОЕ НА ФИЛЬТРАЦИИ
КАЛЬМАНА-БЬЮСИ**

**THE FORECAST OF THE WATER LEVEL IN
THE RIVER WITH THE ABRUPT FALLING
WATER-CURRENT BASED ON KALMAN-BUSY
FILTRATION**

Титов Николай Георгиевич
аспирант

Titov Nikolay Georgievich
graduate

Кубанский государственный университет,
Краснодар, Россия

Kuban state university, Krasnodar, Russia

Кузякина Марина Викторовна
к.ф.-м.н.

Kuzyakina Marina Viktorovna
Candidate of Physical and Mathematical Sciences

Кубанский государственный университет,
Краснодар, Россия

Kuban state university, Krasnodar, Russia

Лебедев Константин Андреевич
д.ф.-м.н., проф.

Lebedev Konstantin Andreevich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences

Кубанский государственный университет,
Краснодар, Россия

Kuban state university, Krasnodar, Russia

Предложена методика краткосрочного
прогнозирования уровня воды в русле реки горного
типа, основанная на методе фильтрации Кальмана-
Бьюси в предположении естественных упрощений,
характерных для натуральных объектов.

The technique of short-term forecasting of the water
level in a vein of the mountain type river, based on a
method of filtration Kalman-Busy in the make
assumption of natural simplifications, characterized for
natural objects is offered

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ. ФИЛЬТР КАЛМАНА-
БЬЮСИ, ПАВОДКОВАЯ СИТУАЦИЯ, МЕТОД
РУНГЕ-КУТТА, ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

Keywords: : MATHEMATICAL MODELING,
KALMAN-BUCY FILTER, THE FLOOD
SITUATION, RUNGE-KUTTA METHODS

Введение

Одной из уникальных черт Краснодарского края является наличие на его территории рек горного типа. Географически сложилось, что данные реки, на территории Краснодарского края, протекают в горных районах большого Сочи. Данный район имеет очень важное рекреационное значение, в то время как особенность рек горного типа к обильным и краткосрочным паводковым ситуациям не благоприятствует развитию горного туризма в указанном районе. Следовательно разработка методики прогнозирования уровня воды в реках горного типа продиктована современной социально-экономической обстановкой, а также

профилактикой чрезвычайных ситуаций на реках горного типа.

Практический интерес для решения задач прогнозирования представляют методы, использующие в математической модели материалы непосредственных наблюдений за потоком воды в русле, а также учитывающие стохастическую природу параметров модели. На практике часто возникают задачи определения состояния некоторой динамической системы по результатам непрерывных наблюдений. Поскольку наблюдения всегда сопровождаются ошибками, то такая задача сводится к оцениванию (фильтрации, экстраполяции и т.д.) состояния системы путем статистической обработки результатов наблюдений. Построить оптимальную оценку состояния динамической системы, основываясь на измерениях, содержащих погрешности, позволяет фильтр Калмана-Бьюси [1]. В данной работе предложена методика краткосрочного прогнозирования уровня воды в русле реки горного типа, основанная на методе фильтрации Кальмана-Бьюси в предположении естественных упрощений, характерных для натурных объектов. Данная методика апробирована на данных реки горного типа Мзымта за 2010 год предоставленных краснодарским центром гидрометеорологии и мониторинга окружающей среды.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему, описываемую скалярными уравнениями:

$$\dot{x} = Fx + Bu + G\varpi, \quad (1)$$

$$z = Hx + v, \quad (2)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Kz, \quad (3)$$

где F, B, G, H – операторы (непрерывно-дифференцируемые функции); A и K – неизвестные операторы в фильтре Калмана-Бьюси; x – измеряемая величина; u – управляющее воздействие и пусть $u = 0$, которое воздействует на объект в текущий момент времени; z – величина на выходе измерительного прибора; $\hat{x}$ – фильтрованная величина на выходе фильтра; $\dot{x}, \dot{\hat{x}}$ – производные по времени от x и $\hat{x}$ соответственно; ϖ, v – случайные возмущения (белый шум) в текущий момент времени.

Уравнение (1) соответствует уравнению объекта с измеряемой величиной x . Уравнение (2) – уравнение, описывающее измерение величины x со случайной погрешностью v . Отметим, что для вывода формул потребуется сделать предположения о свойствах возмущений ϖ, v . Эти предположения сделаем ниже по мере возникновения необходимости. Уравнение (3) соответствует уравнению получаемого значения $\hat{x}$ с помощью фильтра Калмана-Бьюси с коэффициентами A и K . Задача построения фильтра Калмана-Бьюси сводится к определению вида и зависимости коэффициентов A и K от операторов уравнений (1), (2).

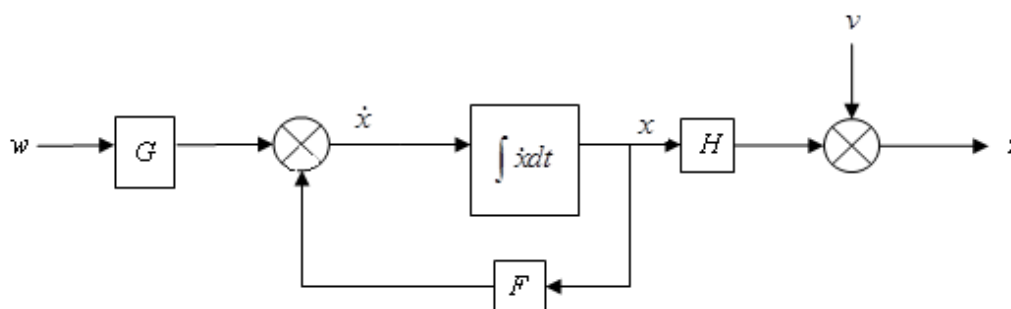


Рис.1. Структурная схема системы, состоящей из уравнений (1) и (2).

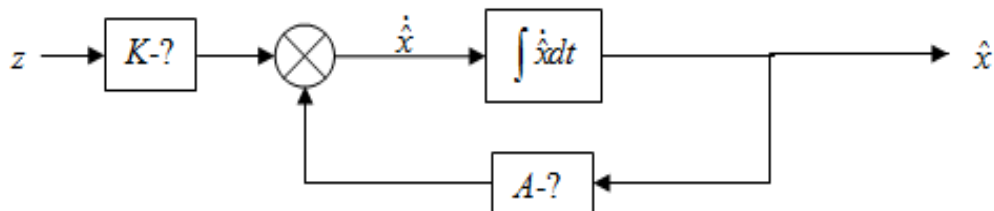


Рис. 2. Структурная схема уравнения (3).

Оптимальная проблема построения фильтра Кальмана-Бьюси состоит в построении таких операторов K и A , чтобы математическое ожидание погрешности $e = x - \hat{x}$ была минимальна

$$M\{[\hat{x}(t) - x(t)]^2\} = M\{e^2\} \rightarrow \min_{A,K}. \quad (4)$$

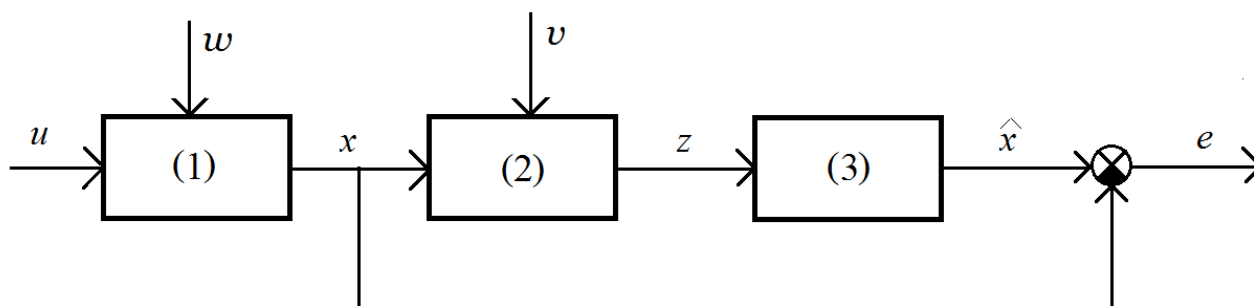


Рис. 3. Блочная схема для вычисления погрешности.

2. Вывод формул для фильтра Кальмана -Бьюси

Для построения оптимального фильтра в непрерывной постановке используем простой подход, суть которого состоит в дифференцировании по коэффициенту, который является оператором K .

Оператор A выразим через H и K (формула 9).

Для определения вида связи оператора A через H и K фильтра Кальмана-Бьюси проведём ряд преобразований. В уравнение (3), вместо z подставим выражение (2)

$$\dot{x} = A\hat{x} + K(Hx + v) = A\hat{x} + KHx + Kv. \quad (5)$$

Перейдем к усредненным значениям $M[x] = \bar{x}$, пользуясь свойствами математического ожидания. Так как по условию постановки задачи v , ω являются белым шумом, то $M[v] = \bar{v} = 0$, $M[\omega] = \bar{\omega} = 0$.

Введем следующие, как правило, допускаемые предположения:

$$M[\hat{x}] = M[x] = \bar{x}, \quad (6)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\bar{x} + KH\bar{x}. \quad (7)$$

Из уравнения (1), учитывая $u = 0$, получаем

$$\dot{\hat{x}} = F\bar{x}. \quad (8)$$

Подставив (8) в (7) будем иметь

$$F\bar{x} = A\bar{x} + KH\bar{x},$$

откуда следует, что

$$A = F - KH. \quad (9)$$

Из (9) видно, что для построения решения фильтра достаточно найти оператор K .

Чтобы определить K , обратимся к уравнениям (3) и (1).

$$\dot{\hat{x}} = (F - KH)\hat{x} + Kz = F\hat{x} + K(z - H\hat{x}) \quad (10)$$

$$\dot{x} = Fx + G\omega \quad (11)$$

Вычтя из уравнения (11) уравнение (10), получим

$$\begin{aligned} \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= \dot{e} = Fx + G\omega - A\hat{x} - Kz = Fx + G\omega - F\hat{x} - Kz + KH\hat{x} = Fx - F\hat{x} + G\omega - K(z - H\hat{x}) = \\ &= F(x - \hat{x}) + G\omega - K(Hx + v - H\hat{x}) = Fe - KHe + G\omega - Kv = (F - KH)e + G\omega - Kv. \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначив в (12) $\dot{x} - \dot{\hat{x}}$ через e , получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно погрешности e

$$\dot{e} = (F - KH)e + G\omega - Kv \quad (13)$$

или

$$\dot{e} = Ae + G\omega - Kv. \quad (14)$$

Пусть

$$U = G\omega - K\nu,$$

тогда

$$\dot{e} = Ae + U \quad (15)$$

Решение дифференциального уравнения будем искать через функцию веса $\varphi(t, \tau)$, которая является решением однородного уравнения

$$\frac{d\varphi(t, t_0)}{dt} = A \cdot \varphi(t, t_0), \quad \varphi(t_0, t_0) = 1. \quad (16)$$

Тогда решение (15) можно записать следующим образом [1]

$$e(t) = \varphi(t, t_0)e(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau)U(\tau)d\tau \quad (17)$$

Дисперсия $l = D(e)$ ошибки e должна быть минимальной

$$l = D(e) = M[e^2] \rightarrow \min_K. \quad (18)$$

Выберем K так чтобы $l(t)$ было минимальным. Для этого

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= M\left[\frac{de^2}{dt}\right] = M\left[2e \frac{de}{dt}\right] = M[2e(Ae + U)] = M[2Ae^2 + 2G\omega e - 2eK\nu] = \\ &= 2Al + 2GM[\omega e] - 2KM[e\nu]. \end{aligned} \quad (19)$$

Для нахождения математических ожиданий $M[\omega e]$ и $M[e\nu]$ произведений умножим (17) на $\omega(t)$.

$$e \cdot \omega(t) = \varphi(t, t_0)e(t_0)\omega(t) + \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau)G\omega(\tau)\omega(t)d\tau - \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau)K\nu(\tau)\omega(t)d\tau \quad (20)$$

Возмущения $\omega(t)$ и погрешность измерения $\nu(t)$ есть случайные гауссовские процессы типа белого шума с нулевым средним и корреляционными процессами

$$\text{cov}(\omega(\tau)\omega(t)) = M[\omega(\tau)\omega(t)] = q(\tau)\delta(\tau - t)$$

и

$$\text{cov}(\nu(\tau)\nu(t)) = M[\nu(\tau)\nu(t)] = r(t)\delta(\tau - t),$$

где $\delta(t)$ единичная функция Дирака; $q(t)$ и $r(t)$ – дисперсии шумов. Тогда

$$M[e\omega] = \varphi(t, t_0)M[e(t_0)\omega(t)] + \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau)GM[\omega(\tau)\omega(t)]d\tau, \quad (21)$$

$$M[e(t_0) \cdot \omega(t)] = 0,$$

$$M[\omega(t) \cdot v(\tau)] = 0.$$

Между моментом t и t_0 корреляция между e, v нулевая, поэтому, используя свойства гауссовского белого шума и интегральные свойства симметричной единичной функции Дирака [1], получим

$$M[e\omega] = \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau)GM[\omega(\tau)\omega(t)]d\tau = \frac{1}{2}G\varphi(t, t)q(t) = \frac{1}{2}Gq(t) \text{ т.к. } \varphi(t, t) = 1. \quad (22)$$

Аналогично

$$M[ev] = -\int_{t_0}^t \varphi(t, \tau)K \cdot M[v(t) \cdot v(\tau)]d\tau = -\frac{1}{2}\varphi(t, t) \cdot K \cdot r(t) = -\frac{1}{2}K \cdot r(t). \quad (23)$$

Подставив (21), (22) в (19) будем иметь

$$\frac{dl}{dt} = 2A \cdot l + G \cdot q(t) + K^2 r(t) = 2(F - KH)l + Gq + K^2 r \quad (24)$$

Чтобы l было минимальным, продифференцируем правую часть по K и приравняем полученное выражение к нулю:

$$-2Hl + 2Kr = 0, \quad (25)$$

откуда

$K = H \cdot \frac{l}{r}$ и учитывая (9) получим

$$A = F - \frac{l}{r}H^2 \quad (26)$$

Будем предполагать, что $H=1$, тогда $K = \frac{l}{r}$

Подставив (26) в (24) получим:

$$\frac{dl}{dt} = 2(F - H^2 \frac{l}{r})l + Gq + H^2 \frac{l^2}{r} = 2Fl - H^2 \frac{l^2}{r} + Gq$$

После проведенных преобразований фильтр Кальмана -Бьюси реализуется с помощью интегрирования системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dl}{dt} = 2Fl - H^2 \frac{l^2}{r} + Gq, \quad (27)$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = 2(F - H^2 \frac{l}{r})\hat{x} + H \frac{l}{r} \cdot (Hx + v) \quad (28)$$

с естественными начальными условиями

$$\begin{aligned} l(0) &= 0 \\ \hat{x}(0) &= x(0) \end{aligned} \quad (29)$$

3. Пример применения фильтра Кальмана-Бьюси

Пример 1. Рассмотрим тестовый пример, для проверки возможностей фильтра, задавая конкретные данные для системы (1)-(3). Пусть операторы скалярные числа равные $F = \beta = 0.1$, $G = H = 1$; $u = 0$ – управляющее воздействие равно нулю. Проверку осуществим по упрощённой схеме. Объект $\frac{dx}{dt} = Fx$; $x(0) = 1$ даёт решение частное решение $x_0 = \exp(\beta t)$. Наложим на решение нормальную случайную составляющую $x = x_0 + \omega$, тогда $z = H(x_0 + \omega) + v$ – величина на выходе измерительного прибора, поступающая на фильтр (27), (28); $q = 0.5$ – дисперсия нормально-распределённой случайной величины $\omega(t)$; $r = 0.1$ – дисперсия случайного возмущения $v(t)$ на измерительном приборе. Начальные условия фильтра $l(0) = 0$, $\hat{x}(0) = 1$.

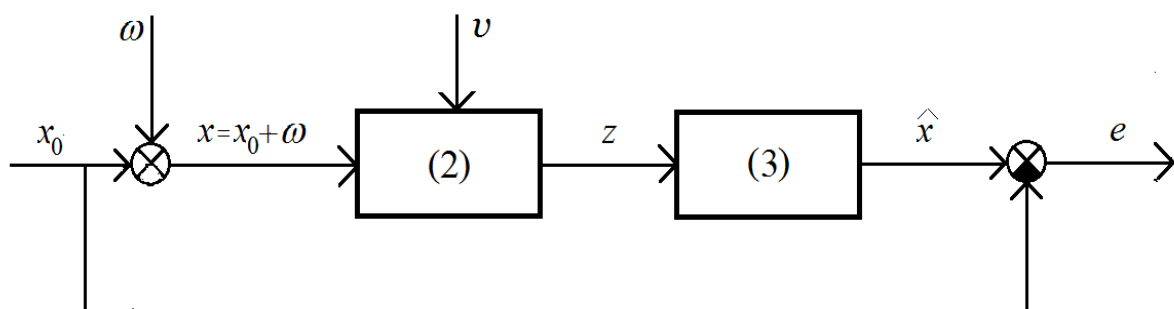


Рис. 4. Блочная схема тестовых примеров.

Результаты фильтрации по разработанной программе на математическом пакете MathCAD представлены на рис. 5

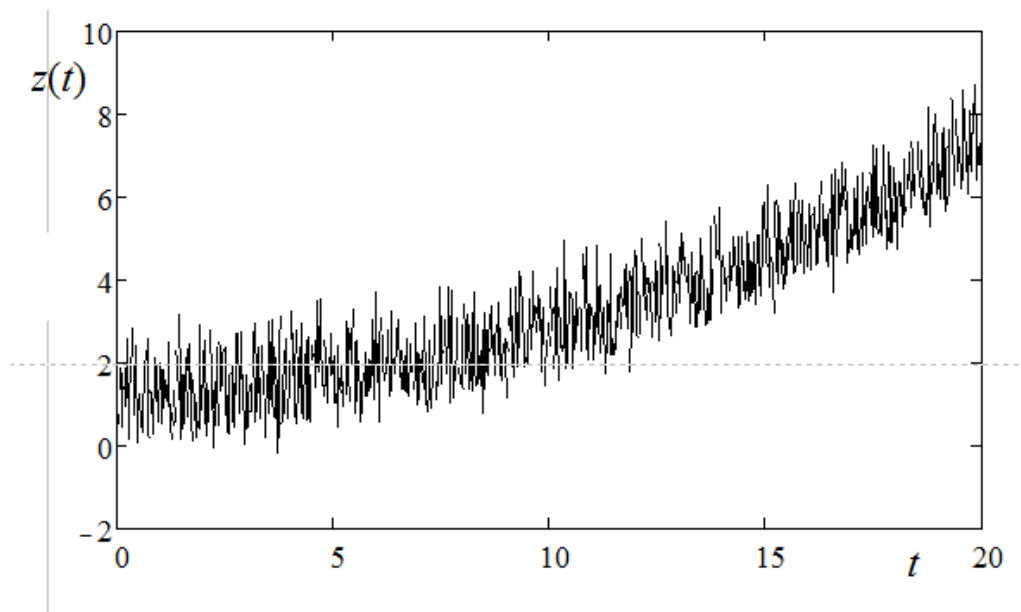
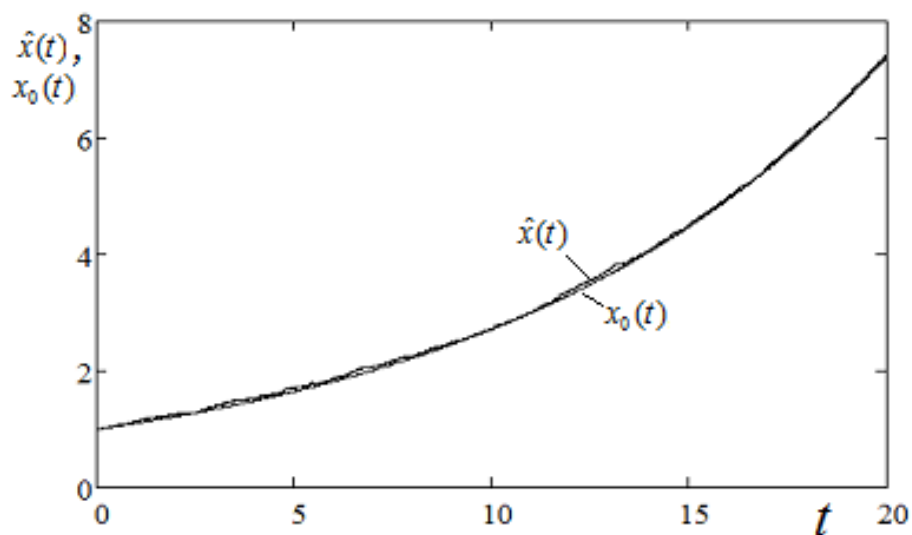
Рис.5. Величина $z(t)$ поступающая на вход фильтра.

Рис.6. Величины: $x_0(t)$, $\hat{x}(t)$ - исходная величина
и отфильтрованная величина соответственно

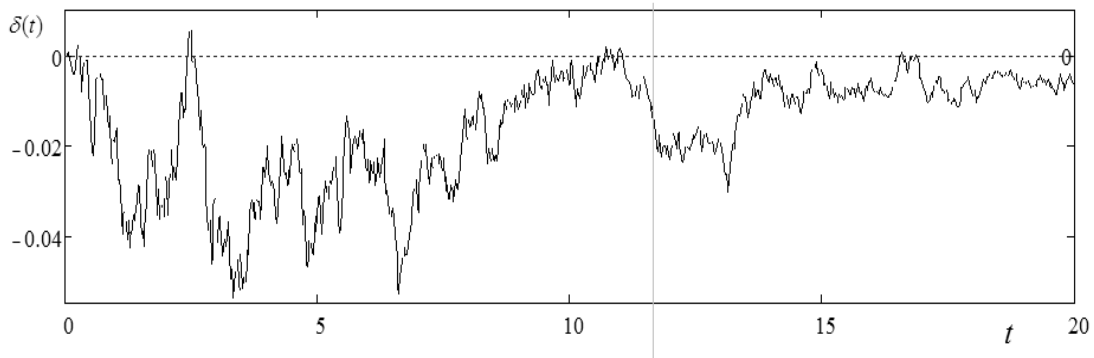


Рис.7. Относительная погрешность фильтрации $\delta(t) = (x_0(t) - \hat{x}(t)) / x_0(t)$.

Как видно из рис.7 Относительная погрешность фильтрации не превышает по модулю величины 0.05.

Пример 2. Рассмотрим тестовый пример с оператором $F = 0$, остальные параметры те же, что и в примере 1. Случай $F = 0$ описывает объект с постоянным уровнем выходного сигнала, $\frac{dx}{dt} = 0$; $x(0) = 0$ даёт решение частное решение $x_0 = 0$. Начальные условия фильтра $l(0) = 0$, $\hat{x}(0) = 0$.

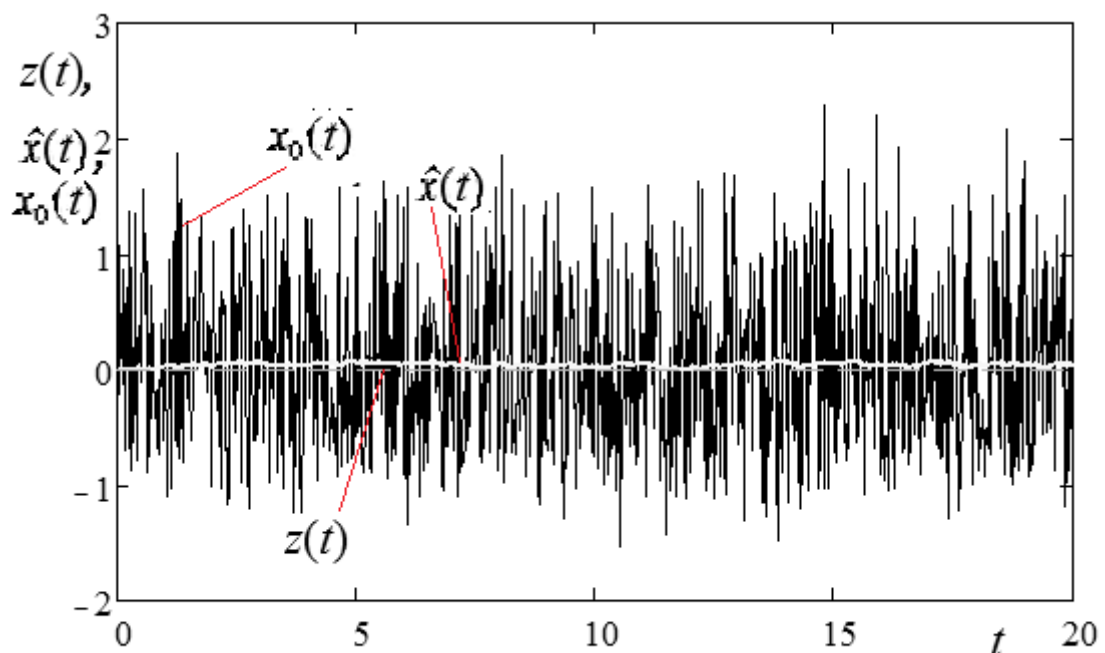


Рис.8. Величина $z(t)=0$ поступающая на вход фильтра (белый пунктир), $x_0(t)$, $\hat{x}(t)$ - исходная величина нормального возмущения (черные) и

отфильтрованная величина (белая линия) соответственно.

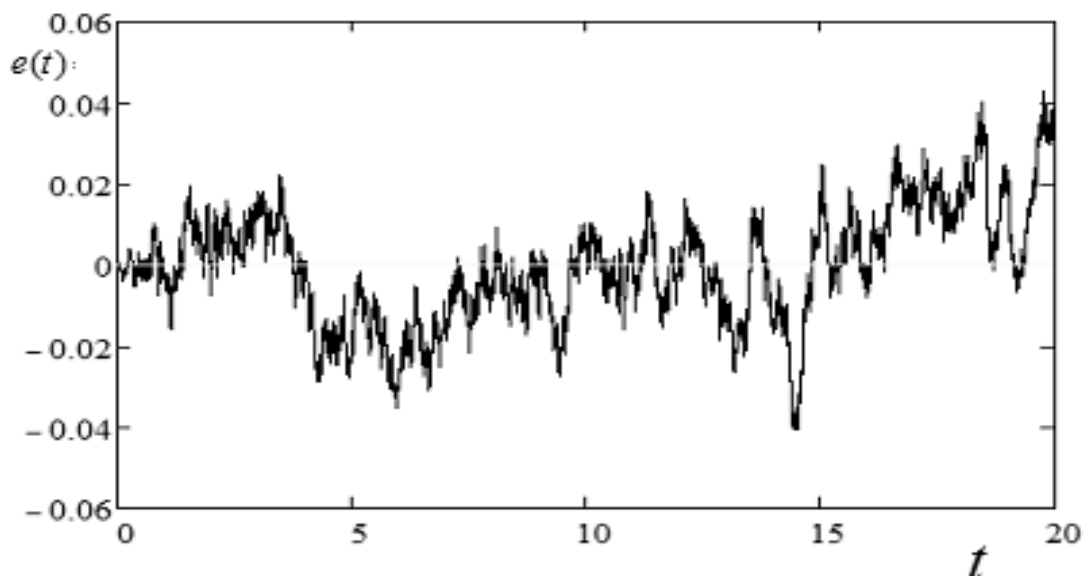


Рис.9. Абсолютная погрешность фильтрации $e(t) = x_0(t) - \hat{x}(t)$

Как видно из рис.9 абсолютная погрешность не превосходит по модулю 0.05 за рассмотренный промежуток времени.

Пример 3. Рассмотрим реальный объект, а именно уровень воды в реке горного типа. Все параметры те же что и в примере 2, за исключением того что $z(t)$ есть реальное значение уровня воды в реке Мзымта за 2010 год взятое по данным Краснодарского центра гидрометеорологии и мониторинга окружающей среды.

Проведя численный эксперимент согласно (14), (15) и сравнив его с результатами регрессионного анализа проведенного на массиве тех же данных сделан вывод об улучшении краткосрочного прогноза уровня воды на основе следующих данных.

Проведенный двухвыборочный F -тест [2, 3] для дисперсий генеральных совокупностей экспериментальных данных и данных полученных с помощью регрессионного анализа показал вероятность сходства этих двух массивов равной $P_{\text{регр.}} = 0,897$, а для дисперсий

генеральных совокупностей экспериментальных данных и данных полученных с помощью фильтрации Калмана-Бьюси - $P_{\text{К-Б.}} = 0,977$. Следовательно, вероятность совпадения массива данных полученного с помощью фильтрации Калмана-Бьюси с массивом экспериментальных данных больше, чем вероятность совпадения между реальными данными и данными полученными с помощью регрессионного анализа.

Метод, основанный на регрессионном анализе [4], показывает большую среднюю ошибку ($10,217 > 5,193$), по сравнению с методом, основанном на использовании фильтра Калмана-Бьюси. Визуализация погрешности прогноза с помощью фильтра Калмана-Бьюси $e(t)$ и погрешности прогноза с помощью регрессионного анализа $p(t)$, представленная на рис. 10, подтверждает проведенные расчеты.

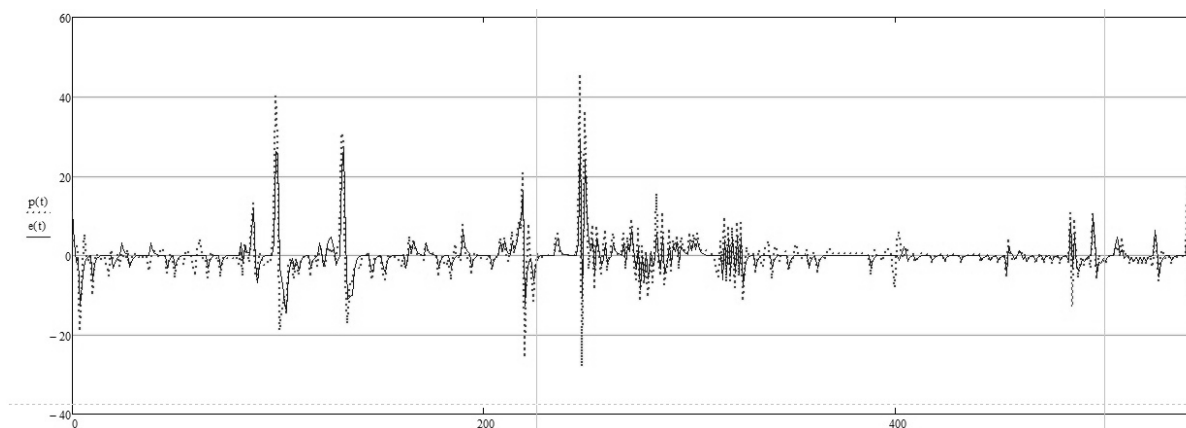


Рис. 10. Графики погрешностей $p(t)$ и $e(t)$.

Список литературы

1. Пугачев В.С. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация [Текст] / В. С. Пугачев, И. Н. Сеницын. М.: Наука, 1990. 632 с.
2. Крамер Г. Математические методы статистики.— М.: ир, 1975. —375 с.
3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика: учеб. пособие для втузов. — М.: Высш. шк., 1984. — 248с.
4. Титов Н.Г., Семенчин Е.А., Об оценке коэффициентов в уравнении линейной регрессии, описывающем изменения уровня воды в русле горной

реки //Известия Кубанского государственного университета. Естественные науки. —2013. — №1(2). — С.49-51.